SÉRIE II
PROBLEMAS DE RADIAÇÃO SOLAR

1. Para a cidade de Lisboa (38 N, 9 W):
   a) Qual a altura solar máxima para a cidade de Lisboa?
   b) Qual a gama de azimutes para o pôr-do-sol em Lisboa?
2. Determine a latitude do Trópico de Caranguejo, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, o sol passa pelo zénite.
3. Determine a latitude do círculo polar ártico, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, há uma noite com 24h.
4. Eratóstenes determinou o raio da Terra notando que em Alexandria no dia do solstício de verão, ao meio-dia, a sombra de uma vara era maior do que em Assuã, 800 km a sul da cidade. Determine o comprimento da sombra de uma vara com 1.5 m em Alexandria (latitude: 31°N) ao meio-dia do solstício de verão.
5. Para o dia 13 de janeiro determinar para Lisboa (38 N, 9 W):
   a) A declinação.
   b) A excentricidade da órbita.
   c) A hora (solar) do ocaso.
   d) A hora local do ocaso
   e) A altura solar às 14h30.
   f) O azimute solar à mesma hora.
   g) O ângulo de incidência da irradiância solar numa parede vertical orientada a sul às 14h30.
   h) A hora (solar) do ocaso para a parede.
   i) A irradiação diária total que incide na parede (desprezando o efeito da atmosfera).
6. Na cidade do Cairo (30 N) no dia 4 de setembro, às 11h00, um piranómetro na horizontal mede 830 W/m^2 e um pireliómetro mede DNI = 700 W/m^2.
   a) Determinar elevação e azimute solar a essa hora.
   b) Determinar a irradiância difusa.
   c) Considerando que as componentes difusa e refletida da irradiância solar são isotrópicas, estimar a irradiância global que atinge uma superfície orientada a sul com uma inclinação de 60°. [albedo do solo 0.40]

7. Na cidade do Oslo (60 N) no dia 4 de setembro, às 13h00, temos DNI = 200 W/m^2. Considere uma superfície orientada a sul com inclinação de 60°.
   a) Determinar o angulo de incidência da irradiância direta na superfície inclinada.
   b) Determinar a irradiância refletida que atinge a superfície inclinada considerando que a reflexão no solo é especular.
8. Considere uma superfície com inclinação de 30° orientada a sudeste, em Lisboa.
   a) Determine a duração do dia de 13 maio.
   b) Para as 10h30, calcular a altura e o azimute solar
   c) Determine o angulo de incidência na superfície às 10h30.
9. Em Maracaibo (10 N, 71 W), na Venezuela, às 15h00 (hora solar) do dia 28 de fevereiro, um piranómetro registou GHI = 650 W/m^2.
   a) Qual a elevação solar?
   b) Usando o modelo de decomposição de Reindl, estime a irradiância difusa e a irradiância direta.
10. A Estação de Investigação Polar Halley, na Antártica, com coordenadas (-75.58 S, -26.73 W) encontra-se numa planície gelada.
    a) Determinar a duração em dias da noite de inverno.
    b) Qual o ângulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte no dia do equinócio às 8:00, hora solar.
    c) Considerando que a refletividade da neve é 0.9, determinar a irradiância direta e refletida que chega à essa superfície vertical a essa hora se a irradiância DNI é 300 W/m^2.
    d) Calcular a irradiação extraterrestre que chegaria a uma superfície horizontal ao longo do dia do equinócio
11. Para o dia 15 de março em Xangai, China (31 N, 121 E).
    a) Determinar a radiação extraterrestre entre as 10h e as 11h.
    b) Estimar a irradiância global às 10h30, sabendo que a irradiação global diária nesse dia foi 5400 Wh/m^2.
    c) Estimar a irradiância difusa e direta a essa hora.
12. Qual é a temperatura de emissão da Lua? (albedo = 0.12)
13. Sem a cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica, o albedo terrestre seria de 27%. Determine o efeito que isso teria na temperatura da superfície terrestre, mantendo o equilíbrio radiativo da atmosfera.
14. O efeito da erupção do vulcão Pinatubo em 1992 na temperatura média do planeta foi estimado num arrefecimento de 0.5 °C durante os 2 anos seguintes à erupção. Determine a variação do albedo médio do planeta devido à erupção.

1. **Para a cidade de Lisboa (38 N, 9 W):**
   a) **Qual a altura solar máxima para a cidade de Lisboa?**

A altura máxima ocorre ao meio-dia (ω = 0) no dia do solstício de verão, quando a declinação é δ = 23.45°.

Nesse caso, temos

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin 23.45 \sin 38 + \cos 23.45 \cos 38 \cos 0$$

$$\sin\alpha = \sin 23.45 \sin 38 + \cos 23.45 \cos 38 = 0.96$$

logo a altura máxima é $\alpha = \arcsin 0.96 = \mathbf{75°.}$

   b) **Qual a gama de azimutes para o pôr-do-sol em Lisboa?**

O azimute solar para o pôr do sol é máximo no solstício de verão (δ = 23.45°) e mínimo no solstício de inverno (δ = -23.45°). No pôr do sol a altura solar é nula (α = 0)

Nesse caso temos

$$\cos\psi = \frac{\sin\alpha\sin\phi - \sin\delta}{\cos\alpha\cos\phi} = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi}$$

e, portanto, temos:

solstício de verão: $\psi = \arccos\left(-\frac{\sin 23.45}{\cos 38}\right) = 120°$

solstício de inverno: $\psi = \arccos\left(\frac{\sin 23.45}{\cos 38}\right) = 59.7°$

pelo que podemos dizer que em Lisboa o azimute do pôr do sol varia **entre 60 e 120°**.

2. **Determine a latitude do Trópico de Caranguejo, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, o sol passa pelo zénite.**

No Trópico de Caranguejo o sol passa pelo zénite no dia do solstício (δ = 23.45°) ao meio-dia (ω = 0).

Temos então

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\sin 90 = \sin 23.45 \sin\phi + \cos 23.45 \cos\phi\cos 0$$

$$1 = \sin 23.45 \sin\phi + \cos 23.45 \cos\phi$$

e portanto, pelo teorema de Pitágoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), resulta diretamente $\phi = \mathbf{23.45°}$.

3. **Determine a latitude do círculo polar ártico, sabendo que é o paralelo que limita a região em que, pelo menos uma vez por ano, há uma noite com 24h.**

No hemisfério norte, a noite mais longa ocorre no solstício de inverno (δ = -23.45°). No círculo polar ártico, nesse dia o nascer do sol (α = 0) "acontece" ao meio-dia (ω = 0).

Então,

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\sin 0 = \sin(-23.45)\sin\phi + \cos(-23.45)\cos\phi\cos 0$$

$$0 = \sin(-23.45)\sin\phi + \cos(-23.45)\cos\phi$$

$$\tan\phi = -\frac{1}{\tan(-23.45)} = \frac{1}{\tan(23.45)} = 2.3$$

e, portanto, a latitude do círculo polar ártico é $\phi = \operatorname{atan} 2.3 = \mathbf{66.5}°$.

4. **Eratóstenes determinou o raio da Terra notando que em Alexandria no dia do solstício de verão, ao meio-dia, a sombra de uma vara era maior do que em Assuã, 800 km a sul da cidade. Determine o comprimento da sombra de uma vara com 1.5 m em Alexandria (latitude: 31°N) ao meio-dia do solstício de verão.**

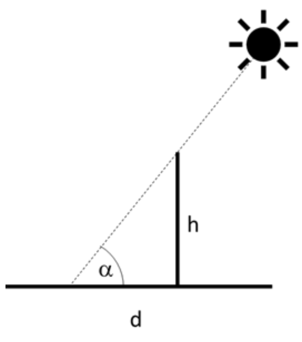
Em Alexandria, ao meio-dia (ω = 0) do solstício de verão (δ = 23.45°) a altura solar é dada por

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin 23.45\sin 31 + \cos 23.45\cos 31\cos 0$$

$$\sin\alpha = \sin 23.45\sin 31 + \cos 23.45\cos 31 = 0.99$$

$$\alpha = \operatorname{asin} 0.99 = 82.45°$$

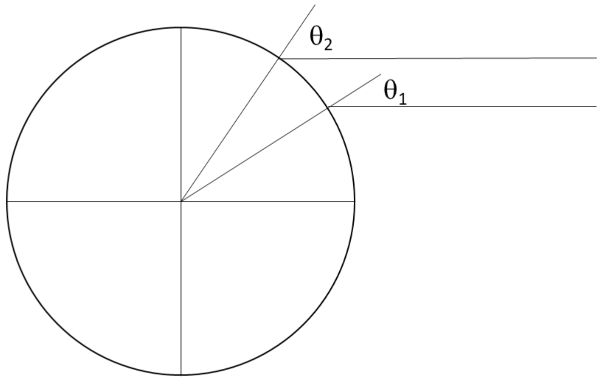


O comprimento da sombra de uma vara vertical pode ser calculado a partir da altura solar considerando a figura:

$$\tan\alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{1.5}{7.5} = \mathbf{0.2\ m}$$

Embora não seja perguntado, o raio da Terra R pode ser determinado notando que, como sugerido pela figura, a distância entre os dois pontos 1 e 2 (800 km) está relacionado com a circunferência através da equação:



$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{360} = \frac{800}{2\pi\, R}$$

$$R = \frac{800\ \times 360}{2\pi\, (\theta_2 - \theta_1)} = \frac{800\ \times 360}{2\pi\, (7.55 - 0.55)} = \mathbf{6548}\ \boldsymbol{km}$$

em que θ está indicado em graus e se considerou que a latitude de Assuã é 24 °N.

O raio da Terra é 6371 km, o que representa um erro na estimativa da ordem de 2.8%!

5. Para o dia 13 de janeiro determinar para Lisboa (38 N, 9 W):

j) A declinação.

O dia 13 de janeiro corresponde ao dia juliano 13. Logo, a declinação é dada por

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(13 + 284)\right) = \mathbf{-16.2}°$$

k) A excentricidade da órbita.

A excentricidade da orbita é

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi\, d}{365}\right)$$

$$E_0 = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi\ \times 13}{365}\right) = \mathbf{1.032}$$

l) A hora (solar) do ocaso.

A hora solar da aurora/ocaso pode ser determinada a partir da angulo horário que é dada por

$$\omega_s = \arccos(-\tan\phi \tan\delta)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan 38 \tan(-16.2)) = \mathbf{76}°$$

Relembrando que o angulo horário pode ser convertida na hora do dia h através da expressão

$$\omega = 15\ (12 - h)$$

a hora solar da aurora/ocaso é

$$h = 12 \pm \frac{\omega_s}{15}$$

$$h = 17.12 = \mathbf{17h07}$$

(e a hora da aurora é 6.87 = 6h52.)

m) A hora local do ocaso

A hora local pode ser determinada a partir da hora solar através de

$$Hora\ local = Hora\ solar - EOT + \frac{LSM - LONG}{15}$$

em que LSM é a longitude do meridiano, LONG é a longitude do local. Para o caso de Lisboa, o meridiano relevante é Greenwich, LSM = 0, e LONG = -9 (porque está a oeste do meridiano; se fosse a leste seria positivo!).

EOT é a equação do tempo que se pode aproximar por

$$EOT(mins) = -7.655 \sin\left(\frac{360}{365} d\right) + 9.873 \sin\left(2 \frac{360}{365} d + 205.7\right) =$$

$$= -7.655 \sin\left(\frac{360}{365}\ 13\right) + 9.873 \sin\left(2 \frac{360}{365} 13 + 205.7\right) = \ -9.40\ mins$$

Podemos então calcular:

$$Hora\ local = 17h07 - (-9.40\ mins) + \frac{0 - 9}{15} horas$$

$$Hora\ local\ \ = 17h07 + 9.4\ mins - 36\ mins = \mathbf{16h40}$$

n) A altura solar às 14h30.

Hora solar 14h30 corresponde a

$$\omega = 15\ (12 - h)$$

$$\omega = 15\ (12 - 14.5)$$

$$\omega = -15\ \times 2.5 = -32.5°$$

A altura solar pode então ser determinada por

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin(-16.2)\sin 38 + \cos(-16.2)\cos 38\cos(-32.5) = 0.47$$

$$\alpha = \operatorname{asin} 0.47 = \mathbf{27.8}°$$

o) O azimute solar à mesma hora.

O azimute solar pode ser determinado usando

$$\cos\psi = \frac{\sin\alpha\sin\phi - \sin\delta}{\cos\alpha\cos\phi}$$

$$\cos\psi = \frac{\sin 27.8\sin 38 - \sin(-16.2)}{\cos 27.8\cos 38} = 0.81$$

donde $\psi = \operatorname{acos} 0.81 = 35.6°$. Notar que esta equação não tem informação explicita sobre a hora do dia, e, portanto, o azimute determinado corresponde a duas posições do sol, uma da parte da manhã e outra da parte da tarde. Relembrando que o azimute é definido como zero para sul e positivo para nascente, como o problema se refere à parte da tarde, o azimute às 14h30 é -35.6°.

Em alternativa podíamos também usar

$$\sin\psi = \frac{\cos\delta\sin\omega}{\cos\alpha}$$

$$\sin\psi = \frac{\cos(-16.2)\sin(-32.5)}{\cos 27.8} = -0.58$$

de onde resulta $\psi = \operatorname{asin} 0.58 = -35.6°$

Neste caso a solução encontrada já vem com o sinal adequado. O inconveniente é que precisamos de calcular separadamente o angulo horário.

p) O ângulo de incidência da irradiância solar numa parede vertical orientada a sul às 14h30.

Para uma parede vertical (β = 90) orientada a sul, o ângulo de incidência é dado por

$$\cos\theta = \sin\delta\sin(\phi-\beta) + \cos\delta\cos(\phi-\beta)\cos\omega$$

$$\cos\theta = \sin(-16.2)\sin(38-90) + \cos(-16.2)\cos(38-90)\cos(-32.5) = 0.77$$

e, portanto, o ângulo de incidência (medido relativamente à normal à superfície, neste caso horizontal) é

$$\theta = \text{acos}\, 0.77 = \mathbf{44°.}$$

Notar que neste caso o angulo de incidência na parede vertical não é o complementar da altura solar porque o azimute solar é diferente de zero e por isso não é normal à parede.

q) A hora (solar) do ocaso para a parede.

A hora do ocaso para a parede pode ser determinada por

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan\phi \tan\delta)\,, \arccos(-\tan(\phi-\beta)\tan\delta)\}$$

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan 38 \tan(-16.2))\,, \arccos(-\tan(38-90)\tan(-16.2))\}$$

$$\omega'_s = \min\{76.7°, 111.8°\}$$

a que corresponde a hora

$$h = 12 + \frac{76.7}{15} = 17.12 = 17h07$$

Para perceber o efeito da parede, e embora não seja perguntado, podemos repetir o exercício para seis meses mais tarde. Neste caso a declinação passa a ser δ = 16.7 e por isso

$$\omega'_s = \min\{103.1°, 68.2°\}$$

E, portanto, o ocaso ocorre às 18h52 enquanto a parede deixa de ver o sol às 16h32.

r) A irradiação diária total que incide na parede (desprezando o efeito da atmosfera).

A irradiação diária total incidente na parede para esse dia pode ser determinada por

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180}\omega'_s \sin\delta \sin(\phi-\beta) + \cos\delta\cos(\phi-\beta)\sin\omega'_s\right)$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180} 76.7\ \sin(-16.2)\sin(38-90) + \cos(-16.2)\cos(38-90)\sin 76.7\right) =$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1367 \times 1.03\ \times\ 0.58 = \mathbf{6261\ Wh/m^2}$$

em que se considerou $I_{sc} = 1367\ W/m^2$.

É interessante notar que, embora a duração do dia seja bastante longa, mais de 10h, a irradiação na parede corresponde a cerca de 4.5h de radiação solar normal à superfície (I_{sc}) ou a 6.2 horas-de-sol (uma hora-de-sol é definido como 1 kWh/m^2 que corresponde à irradiação que chega ao solo, considerando o efeito da atmosfera, num dia de céu limpo para uma latitude moderada).

6. **Na cidade do Cairo (30 N) no dia 4 de setembro, às 11h00, um piranómetro na horizontal mede 830 W/m^2 e um pireliómetro mede DNI = 700 W/m^2.**
   a) Determinar elevação e azimute solar a essa hora.

Para determinar a elevação ou altura solar precisamos de começar por determinar a declinação para o dia 4 de julho:

jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	**d**
31	28	31	30	31	30	31	31	4	**247**

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(247 + 284)\right) = 18.7°$$

As 11h00 corresponde ao angulo horário

$$\omega = 15\,(12 - h)$$

$$\omega = 15\,(12 - 11) = 15°$$

Podemos então determinar a altura solar

$$\sin\alpha = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin 18.7 \sin 30 + \cos 18.7 \cos 30 \cos 15 = 0.95$$

$$\alpha = \arcsin 0.95 = \mathbf{72.3}°$$

E o azimute solar

$$\sin\psi = \frac{\cos\delta \sin\omega}{\cos\alpha}$$

$$\sin\psi = \frac{\cos 18.7 \sin 15}{\cos 72.3} = 0.80$$

$$\psi = \arccos 0.80 = \mathbf{46}°$$

b) Determinar a irradiância difusa.

A irradiância global na horizontal (I, muitas vezes também denominada GHI, de *Global horizontal irradiance*) é a soma da irradiância direta segundo o plano de incidência (I_b, em que o b se refere a *beam,* para distinguir de difusa, muitas vezes expressa como DNI, de *Direct normal irradiance*) mais a irradiância difusa (I_d, muitas vezes descrita como DHI, de *Diffuse horizontal irradiance*):

$$I = I_b \cos\theta + I_d$$

$$I_d = I - I_b \cos\theta = I - I_b \sin\alpha$$

$$I_d = 830 - 700 \times 0.95 = \mathbf{163\ W/m^2}$$

c) Considerando que as componentes difusa e refletida da irradiância solar são isotrópicas, estimar a irradiância global que atinge uma superfície orientada a sul com uma inclinação de 60°. [albedo do solo 0.40]

Para uma superfície virada a sul com inclinação de 25°, o angulo de incidência é dado por

$$\cos\theta = \sin\delta \sin(\phi - \beta) + \cos\delta \cos(\phi - \beta) \cos\omega$$

$$\cos\theta = \sin 18.7 \sin(30 - 60) + \cos 18.7 \cos(30 - 60) \cos 15 = 0.63$$

e portanto

$$\theta = \arccos 0.63 = 50.8°$$

A irradiância global que chega à superfície (I_β, às vezes descrita como I_{POA} em que o índice POA se referre a *plane of the array*) é a soma das componentes direta, refletida e difusa:

$$I_\beta = I_{b\beta} + I_{r\beta} + I_{d\beta}$$

Vamos calcular cada uma das componentes separadamente:

- A irradiância direta que chega à superfície ($I_{b\beta}$, com *b* de *beam*) é portanto

$$I_{b\beta} = I_b \cos\theta = 700 \times 0.63 = 442\ W/m^2$$

- A irradiância refletida recebida pela superfície ($I_{r\beta}$) é igual a

$$I_{r\beta} = \rho\ I\ \frac{1 - \cos\beta}{2} = 0.40 \times 830\ \frac{1 - \cos 60}{2} = 83\ W/m^2$$

Notar que quando a inclinação da superfície é zero (horizontal, $\beta = 0$) não existe radiação refletida a chegar à superfície e quando a inclinação é vertical ($\beta = 90$) a radiação refletida incidente na superfície é metade da refletida total porque metade foi na “outra” direção.

- A irradiância difusa que chega à superfície ($I_{d\beta}$) é i

$$I_{d\beta} = I_d \; \frac{1+\cos\beta}{2} = \; 163 \; \frac{1+\cos 60}{2} = 122 \; W/m^2$$

Notar que quando a inclinação da superfície é zero (horizontal, $\beta = 0$) a radiação difusa a chegar à superfície é DHI (por definição) e quando a inclinação é vertical ($\beta = 90$) a radiação difusa incidente na superfície é metade da difusa na horizontal porque metade foi na "outra" direção.

Somando as 3 componentes obtemos:

$$I_\beta = I_{b\beta} + I_{r\beta} + I_{d\beta}$$

$$I_\beta = 442 + 83 + 122 = \mathbf{648 \; W/m^2}$$

É interessante notar que embora a fração de radiação difusa seja relativamente baixa

$$\frac{I_d}{I} = \frac{163}{830} = 20\%$$

e portanto 80% da radiação que chega à superfície horizontal seja radiação direta, para a superfície inclinada a fração de radiação direta representa apenas 68%.

7. **Na cidade do Oslo (60 N) no dia 4 de setembro, às 13h00, temos DNI = 200 W/m^2. Considere uma superfície orientada a sul com inclinação de 60°.**
   a) **Determinar o angulo de incidência da irradiância direta na superfície inclinada.**

Felizmente (!?) trata-se do mesmo dia do exercício anterior e por isso 'metade' já está resolvido… só mudam os números. Temos, portanto:

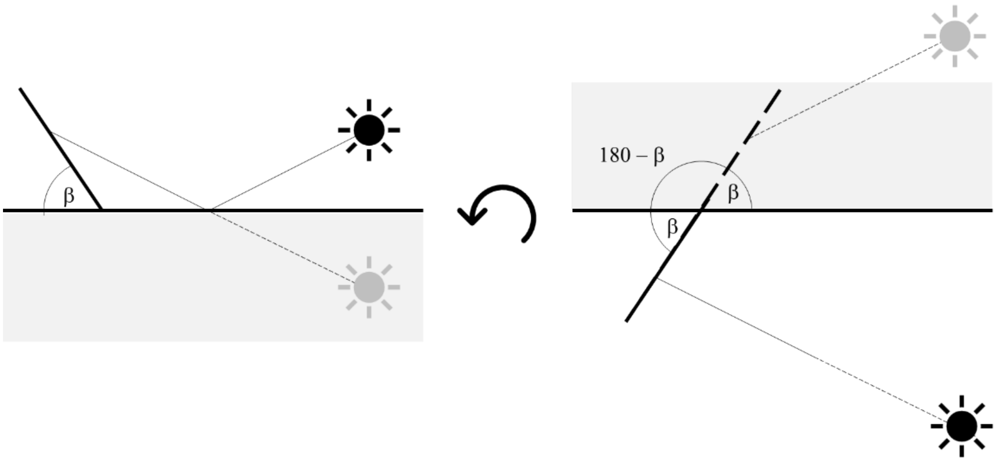
$$\cos\theta = \sin\delta \sin(\phi - \beta) + \cos\delta \cos(\phi - \beta) \cos\omega$$

$$\cos\theta = \sin 18.7 \sin(60 - 60) + \cos 18.7 \cos(60 - 60) \cos(-15)$$

$$\cos\theta = \cos 18.7 \cos(-15) = 0.92$$

$$\theta = \arccos 0.92 = \mathbf{23.8}°$$

b) Determinar a irradiância refletida que atinge a superfície inclinada considerando que a reflexão no solo é especular.



Como a figura sugere, o angulo de incidência da radiação refletida na superfície inclinada corresponde ao angulo de incidência da radiação direta com uma superfície com inclinação $(180 - \beta)$ e, portanto, podemos calcular a irradiância refletida especular através da equação

$$I_{\beta r}{}^{*} = \rho\, I_b \cos\theta^{*}$$

em que

$$\cos\theta^{*} = \sin\delta \sin\big(\phi - (180 - \beta)\big) + \cos\delta \cos\big(\phi - (180 - \beta)\big)\cos\omega$$

$$\cos\theta^{*} = \sin 18.7 \sin\big(60 - (180 - 60)\big) + \cos 18.7 \cos\big(60 - (180 - 60)\big)\cos(-15)$$

$$\cos\theta^{*} = \sin 18.7 \sin(-60) + \cos 18.7 \cos(-60)\cos(-15) = 0.18$$

(e portanto $\theta^{*} = \arccos 0.18 = 79.6°$, ou seja a radiação refletida é quase tangente à superfície, como de resto sugerido pela figura).

Bom, podemos agora calcular a irradiância refletida que chega à superfície:

$$I_{\beta r}{}^{*} = \rho\, I_b \cos\theta^{*} = 0.40 \times 200 \times 0.18 = \mathbf{14.4\ W/m^2}$$

Trata-se de um valor quase desprezável.

8. Considere uma superfície com inclinação de 30° orientada a sudeste, em Lisboa.

a) Determine a duração do dia de 13 maio.

O dia 13 de maio corresponde ao dia juliano d = 133:

jan	fev	mar	abr	mai	**d**
31	28	31	30	13	**133**

e por isso a declinação para esse dia é

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(133 + 284)\right) = 6.1°$$

Ora, o angulo horário para o nascer/pôr-do-sol é dado por

$$\omega'_s = \arccos(-\tan\phi \tan\delta)$$

como a latitude de Lisboa é 38° temos

$$\omega'_s = \arccos(-\tan 38 \tan 6.1) = 94°$$

b) Para as 10h30, calcular a altura e o azimute solar

O angulo horário para as 10h30 é

$$\omega = 15\,(12 - h)$$
$$\omega = 15\,(12 - 10.5) = 22.5°$$

e a altura solar é dada, como habitualmente, por

$$\sin\alpha = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin 6.1 \sin 38 + \cos 6.1 \cos 38 \cos 22.5 = 0.85$$

$$\alpha = \arcsin 0.85 = 58°$$

enquanto o azimute solar é

$$\sin\psi = \frac{\cos\delta \sin\omega}{\cos\alpha}$$

$$\sin\psi = \frac{\cos 6.1 \sin 22{,}5}{\cos 58} = 0.72$$

$$\psi = \arcsin 0.72 = 46°$$

c) Determine o angulo de incidência na superfície às 10h30.

Podemos calcular o angulo de incidência para a superfície inclinada com orientação arbitrária usando a expressão

$$\cos\theta = (\sin\phi\cos\beta - \cos\phi\sin\beta\cos\gamma)\sin\delta + (\cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\beta\cos\gamma)\cos\delta\cos\omega + \cos\delta\sin\beta\sin\gamma\sin\omega$$

onde temos

- Latitude: $\phi = 38°$
- Inclinação da superfície: $\beta = 30°$
- Declinação: $\delta = 6.1°$
- Orientação da superfície: $\gamma = 45°$ (zero para sul, negativo para oeste)
- Angulo horário: $\omega = 22.5°$

Temos pois

$$\cos\theta = (\sin 38\cos 30 - \cos 38\sin 30\cos 45)\sin 6.1 + (\cos 38\cos 30 + \sin 38\sin 30\cos 45)\cos 6.1\cos 22.5 + \cos 6.1\sin 30\sin 45\sin 22.5 = 0.027 + 0.827 + 0.135 = 0.988$$

logo

$$\theta = \arccos 0.988 = 8.8°$$

Podemos concluir, portanto, que a incidência na superfície é quase perpendicular a essa hora.

Uma forma alternativa de calcular o angulo de incidência numa superfície inclinada com orientação arbitrária, mais simples, mas que obriga a conhecer o angulo zenital e o azimute, é

$$\cos\theta = \cos\beta\cos\theta_z + \sin\beta\sin\theta_z\cos(\psi - \gamma)$$

$$\cos\theta = \cos 30\cos(90 - 58) + \sin 30\sin(90 - 58)\cos(46 - 45) = 0.988$$

$$\theta = \arccos 0.988 = 8.8°$$

obtendo-se o mesmo resultado.

9. Em Maracaibo (10 N, 71 W), na Venezuela, às 15h00 (hora solar) do dia 28 de fevereiro, um piranómetro registou GHI = 650 W/m^2.

c) Qual a elevação solar?

Como habitualmente, a declinação é dada por

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(59 + 284)\right) = -19.6°$$

O angulo horário para as 15h00 é

$$\omega = 15\ (12 - h)$$
$$\omega = 15\ (12 - 15) = -45°$$

e a elevação ou altura solar é dada por

$$\sin\alpha = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\omega$$

$$\sin\alpha = \sin(-19.6) \sin 10 + \cos(-19.6) \cos 10 \cos(-45) = 0.87$$

$$\alpha = \arcsin 0.87 = 60°$$

d) Usando o modelo de decomposição de Reindl, estime a irradiância difusa e a irradiância direta.

Os modelos de decomposição estimam a <u>fração de radiação difusa</u> k_d com o <u>índice de claridade</u> $k_t \equiv I/I_0$, em que I é a irradiância global na superfície (considerando o efeito da atmosfera) e I_0 é a irradiância no topo da atmosfera (não considerando o efeito da atmosfera).

No caso particular de Reindl temos:

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248\, k_t \Leftarrow\ k_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67\ k_t \Leftarrow\ 0.3\ < k_t \leq 0.78 \\ 0.147 \Leftarrow\ k_t > 0.78 \end{cases}$$

Para estimar a irradiância difusa em Maracaibo precisamos, portanto, de estimar a irradiância extraterrestre para as 15h00 do dia 28 de fevereiro.

Desprezando a excentricidade temos

$$I_0 = I_{SC} \cos\theta_z = 1366 \cos(90 - \alpha) = 1366 \cos(90 - 60) = 1182\ W/m^2$$

e, portanto, o índice de claridade é

$$k_t = \frac{I}{I_o} = \frac{650}{1182} = 0.55$$

De acordo com a expressão para o modelo de decomposição de Reindl, para um valor intermédio de k_t temos

$$k_d = \frac{I_d}{I} = 1.45 - 1.67\ \ k_t = 1.45 - 1.67\ \times 0.55 = 0.53$$

ou seja, a essa hora mais de metade da irradiância medida em Maracaibo era irradiância difusa.

Daqui resulta

$$I_d = k_d\, I = \ 0.53\ \times 650 = 346\, W/m^2$$

A irradiância direta I_b (com índice *b* de *beam*, muitas vezes também representada como DNI de *direct normal irradiance*) pode ser determinada a partir de

$$I = I_b \cos\theta + I_d$$

$$I_b = \frac{I - I_d}{\cos\theta} = \frac{650 - 346}{0.87} = 349\, W/m^2$$

10. A Estação de Investigação Polar Halley, na Antártica, com coordenadas (-75.58 S, -26.73 W) encontra-se numa planície gelada.

a) Determinar a duração em dias da noite de inverno.

Para determinar a duração da noite de inverno em Polar Halley precisamos de determinar o dia (ou, de forma equivalente, a declinação) em que começa e que acaba.

Considere-se então a equação para a altura solar

$$\sin\alpha = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\omega$$

No início (ou fim) da noite de inverno temos altura solar zero ao meio-dia solar e portanto

$$\sin 0 = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos 0$$

$$0 = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi$$

$$\sin\delta \sin\phi = -\cos\delta \cos\phi$$

$$\tan\delta = -\frac{1}{\tan\phi}$$

$$\delta = \arctan\left(-\frac{1}{\tan\phi}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\tan 76}\right) = 14°$$

Existem dois dias no ano para os quais a declinação tem este valor (isto é verdade para qualquer valor da declinação, exceto nos solstícios) que podem ser calculados recordando que

$$\delta = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$14 = 23.45 \sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right)$$

$$\frac{360}{365}(d + 284) = \arcsin\frac{14}{23.45}$$

$$\frac{360}{365}(d + 284) = 36.7° \quad \vee \quad \frac{360}{365}(d + 284) = 180 - 36.7°$$

porque a função seno é simétrica relativa a 90°.

Daqui resulta

$$d + 284 = 37.2 \quad \vee \quad d + 284 = 145.3$$

$$d = -246.8 \quad \vee \quad d = -138.7$$

Somando 365 para termos um dia juliano positivo (i.e., fazendo uma 'translação' de 1 ano) temos

$$d = 118.2 \quad \vee \quad d = 226.3$$

Logo a duração da noite é $226 - 118 = \mathbf{108}$ **dias.**

Notar que o solstício de inverno (porque estamos no hemisfério sul, 21 junho, dia juliano 172) corresponde ao máximo da declinação (i.e., o 'eixo de simetria' da noite de inverno) e é o ponto médio entre as duas datas.

Se não tivéssemos notado que a função *arcsin* é uma função simétrica em torno de 90°, e por isso com duas soluções quando se considera todo o período completo da função, teríamos apenas uma solução (correspondente ao princípio da noite de inverno, dia 118). Nesse caso teríamos que 'contar' o período entre essa data e o solstício (dia 172) e multiplicado por dois para ter a duração completa da noite de inverno. O resultado seria naturalmente o mesmo.

b) **Qual o ângulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte no dia do equinócio às 8:00, hora solar.**

No dia do equinócio δ = 0.

As 8h00 corresponde ao angulo solar

$$\omega = 15\ (12 - h)$$

$$\omega = 15\ (12 - 8) = 60°$$

e, portanto, o angulo de incidência numa superfície vertical orientada a norte (o que na antártica quer dizer orientada para o equador) pode ser determinado por

$$\cos\theta = \sin\delta \sin(\phi - \beta) + \cos\delta \cos(\phi - \beta) \cos\omega$$

$$\cos\theta = \sin 0 \sin(76 - 90) + \cos 0 \cos(76 - 90) \cos 60$$

$$\cos\theta = \cos(76 - 90) \cos 60 = 0.48$$

$$\theta = \arccos 0.48 = \mathbf{61.0}°$$

c) **Considerando que a refletividade da neve é 0.9, determinar a irradiância direta e refletida que chega à essa superfície vertical a essa hora se a irradiância DNI é 300 W/m².**

A <u>irradiância direta</u> que chega à superfície vertical é simplesmente

$$I_{b\beta} = I_b \cos\theta = 300\ \times 0.48 = \mathbf{145\ W/m^2}$$

A <u>irradiância refletida</u> que chega à superfície vamos considerar que a reflexão na neve é difusa e por isso isotrópica. Nesse caso precisamos de saber qual a irradiância no solo e portanto vamos calcular o angulo zenital

$$\cos\theta_z = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos\omega$$

$$\cos\theta_z = \sin 0 \sin\phi + \cos 0 \cos\phi \cos\omega$$

$$\cos\theta_z = \cos\phi \cos\omega = \cos 76 \cos 60 = 1.45$$

$$\theta_z = \arccos 1.45 = 83.1°$$

Agora podemos escrever

$$I_{r\beta} = \rho\ (I_b \cos\theta_z)\frac{1 - \cos\beta}{2} = 0.9 \times 300\ \times 1.45 \times \frac{1}{2} = \mathbf{195\ W/m^2}$$

onde assumimos que a radiação difusa pode ser desprezada e por isso a irradiância que chega ao solo é apenas a irradiância direta, corrigida pelo angulo de incidência.

A irradiância total na parede é naturalmente a soma das duas componentes:

$$I_\beta = I_{b\beta} + I_{r\beta} = 145 + 195 = \mathbf{341\ W/m^2}$$

A irradiância total que chega à parede é superior à irradiância direta normal ao plano de incidência graças à reflexão no solo!

É também interessante notar que a irradiância refletida é superior à irradiância direta que incide na parede. Isso sucede porque neste caso a irradiância refletida é isotrópica e por isso uma parte significativa (metade) vai chegar à parede enquanto a irradiância direta chega à superfície com um angulo de incidência 'quase' tangente (60°). Se a reflexão fosse especular (por exemplo se houvesse um lago 'líquido' junto da parede, um espelho de água) a irradiância difusa seria bem menor.

d) Calcular a irradiação extraterrestre que chegaria a uma superfície horizontal ao longo do dia do equinócio.

A irradiação ao longo de um dia numa superfície horizontal pode ser calculada por

$$H_0 = \frac{24}{\pi} I_{sc} E_0 \left(\frac{\pi}{180}\omega_s \sin\delta \sin\beta + \cos\delta\cos\beta\sin\omega_s\right)$$

Tratando-se do equinócio (pode ser qualquer um deles porque o resultado vai ser igual e por isso escolhemos o primeiro do ano, 31 de março, d = 80) sabemos que $\delta = 0$, $\omega_s = 90°$.

Também podemos calcular a excentricidade da órbita

$$E_0 = 1 + 0.033\cos\left(\frac{2\pi\, d}{365}\right) = 1 + 0.033\cos\left(\frac{2\pi\ \times 80}{365}\right) = 1.06$$

e, portanto, estamos aptos a calcular a irradiação diária extraterrestre no equinócio:

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1366 \times 1.06 \left(\frac{\pi}{180} 90 \sin 0 \sin 0 + \cos 0 \cos 0 \sin 90\right)$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi} 1366 \times 1.06 = 11098 = \mathbf{11\ kWh/m^2}$$

A irradiação extraterrestre ao longo do equinócio é pois de 11 horas-de-sol. Na realidade, considerando o efeito da atmosfera a irradiação diária deveria ser bem menor.

11. Para o dia 15 de março em Xangai, China (31 N, 121 E).

a) Determinar a radiação extraterrestre entre as 10h e as 11h.

A irradiação horária pode ser calculada através da equação seguinte:

$$I_0|_{t_1}^{t_2} = I_{sc}E_0\left((t_2 - t_1)\sin\delta\sin\phi + \frac{12}{\pi}(\sin(15\ t_1) - \sin(15\ t_2))\cos\delta\cos\phi\right)$$

em que t_1 e t_2 são medidos em horas, a contar a partir da meia-noite mas que têm que ser durante o dia. Neste caso concreto temos

$$t_1 = 10$$

$$t_2 = 11$$

O dia 15 de março é o dia 74 e por isso a declinação é

$$\delta = 23.45\sin\left(\frac{360}{365}(d + 284)\right) = 23.45\sin\left(\frac{360}{365}(74 + 284)\right) = -15.7°$$

e a excentricidade da orbita é

$$E_0 = 1 + 0.033\cos\left(\frac{2\pi\ d}{365}\right) = 1 + 0.033\cos\left(\frac{2\pi\ \times 74}{365}\right) = 1.031$$

Temos então

$$I_0|_{t_1}^{t_2} = I_{sc}E_0\left((t_2 - t_1)\sin\delta\sin\phi + \frac{12}{\pi}(\sin(15\ t_1) - \sin(15\ t_2))\cos\delta\cos\phi\right)$$

$$I_0|_{10}^{11} = 1366\ \times 1.031\Big((11 - 10)\sin(-15.7)\sin 31 + \frac{12}{\pi}(\sin(15\ \times 10) - \sin(15\ \times 11))\cos(-15.7)\cos 31\Big)$$

$$\boldsymbol{I_0|_{10}^{11} = 1052\ Wh/m^2}$$

ou seja, a irradiação extraterrestre durante essa hora é pouco mais do que uma hora-de-sol.

b) Estimar a irradiância global às 10h30, sabendo que a irradiação global diária nesse dia foi 5400 Wh/m².

Para determinar a irradiância global (que considera o efeito da atmosfera) num dado instante sabendo a irradiação global diária podemos usar o modelo de Collares Pereira que permite determinar o quociente entre a média da irradiância global $\overline{I_t}$ para a hora ω e a irradiação média diária $\overline{H_t}$ considerando apenas a hora de nascer/pôr do sol:

$$r_t(\omega) \equiv \frac{\overline{I_t}}{\overline{H_t}} \approx \frac{I_t}{H_t} = \frac{\pi}{24}(a + b\cos\omega)\ \frac{\cos\omega - \cos\omega_s}{\sin\omega_s - \left(\frac{\pi}{180}\omega_s\cos\omega_s\right)}$$

com

$$a = 0.409 + 0.5016\sin(\omega_s - 60°)$$

$$b = 0.6609 - 0.4676\sin(\omega_s - 60°)$$

Notar que esta aproximação pressupõe que o dia em concreto é típico, ou seja, a irradiação diária desse dia é comparável com a irradiação diária média $H_t \approx \overline{H_t}$.

Para o nosso caso concreto para o dia 15 de março temos

$$\omega = 15\,(12 - h) = 15\,(12 - 10.5) = 22.5°$$

e

$$\omega_s = \arccos(-\tan\phi\tan\delta)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan 31\tan(-15.7)) = 80.3°$$

e portanto

$$a = 0.409 + 0.5016\sin(\omega_s - 60°) = 0.409 + 0.5016\sin(80.3 - 60°) = 0.583$$

$$b = 0.6609 - 0.4676\sin(\omega_s - 60°) = 0.6609 - 0.4676\sin(80.3 - 60°) = 0.499$$

donde

$$\overline{I_t} = \overline{H_t}\left(\frac{\pi}{24}(a + b\cos\omega)\ \frac{\cos\omega - \cos\omega_s}{\sin\omega_s - \left(\frac{\pi}{180}\omega_s\cos\omega_s\right)}\right)$$

$$\overline{I_t} = 5400\left(\frac{\pi}{24}(0.583 + 0.499\cos 22.5)\ \frac{\cos 22.5 - \cos 80.3}{\sin 80.3 - \left(\frac{\pi}{180}80.3\cos 80.3\right)}\right)$$

$$\overline{I_t} = 5400 \times 0.13 \times 1.01 = \mathbf{743.8\ W/m^2}$$

c) Estimar a irradiância difusa e direta a essa hora.

Da alínea a) sabemos que a irradiação extraterrestre entre as 10 e as 11h é 1052 Wh/m^2 logo a irradiância terrestre às 10h30 é 1052 W/m^2.

Da alínea b) sabemos que a irradiação global a essa hora é 744 W/m^2.

Podemos calcular o índice de claridade, a razão entre a irradiância global medida na superfície e a irradiância extraterrestre

$$k_t = \frac{I}{I_0} = \frac{744}{1052} = 0.70$$

e em seguida podemos estimar a irradiância difusa usando, por exemplo, o modelo de Reindl temos:

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248\, k_t \Leftarrow\ k_t \leq 0.3 \\ 1.45 - 1.67\ k_t \Leftarrow\ 0.3\ < k_t \leq 0.78 \\ 0.147 \Leftarrow\ k_t > 0.78 \end{cases}$$

Assim, a irradiância difusa I_d pode ser estimada por

$$\frac{I_d}{I} = 1.45 - 1.67\ k_t = 0.27$$

$$I_d = 0.27\, I = 0.27\ \times 744 = \mathbf{200}\ \boldsymbol{W/m^2}$$

Já a irradiância direta I_b na horizontal é dada por

$$I = I_b + I_d$$

$$I_b = I - I_d = 744 - 200 = \mathbf{544}\ \boldsymbol{W/m^2}$$

12. Qual é a temperatura de emissão da Lua? (albedo = 0.12)

A distância média entre Lua e Sol é igual à distância da Terra ao Sol (porque a Lua é um satélite da Terra) e, portanto, a radiação incidente é S_0 = 1366 W/m^2. A Lua deve estar em equilíbrio radiativo e, portanto, a radiação absorvida deve ser igual à radiação emitida.

Como não temos a complicação extra da atmosfera e do efeito estufa temos apenas

$$(1-\alpha)S_0\pi R^2 =\ 4\pi R^2\sigma T^4$$

em que o termo da esquerda descreve a energia absorvida (igual à incidente menos a refletida) e o termo da direita descreve a emissão. Não precisamos de saber o raio da lua R porque aparece dos dois lados da equação. Reparar que do lado da radiação absorvida a área relevante é a do círculo (para o Sol a Lua é um círculo) mas do lado da emissão é a área de uma esfera.

A equação anterior pode ser reescrita em função da temperatura:

$$T^4 = \frac{(1-\alpha)S_0\pi R^2}{4\pi R^2\sigma} = \frac{(1-\alpha)S_0}{4\,\sigma}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)S_0}{4\,\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0.2)\ 1366}{4\ \times\ 5.6\ \times 10^{-8}}} = \mathbf{264}\ \boldsymbol{K}$$

Nota: o que acabámos de estimar é a temperatura média da Lua; a Lua apresenta amplitudes térmicas enormes entre a região iluminada (que pode atingir 400 K) e a região à sombra (que pode descer até 140 K).

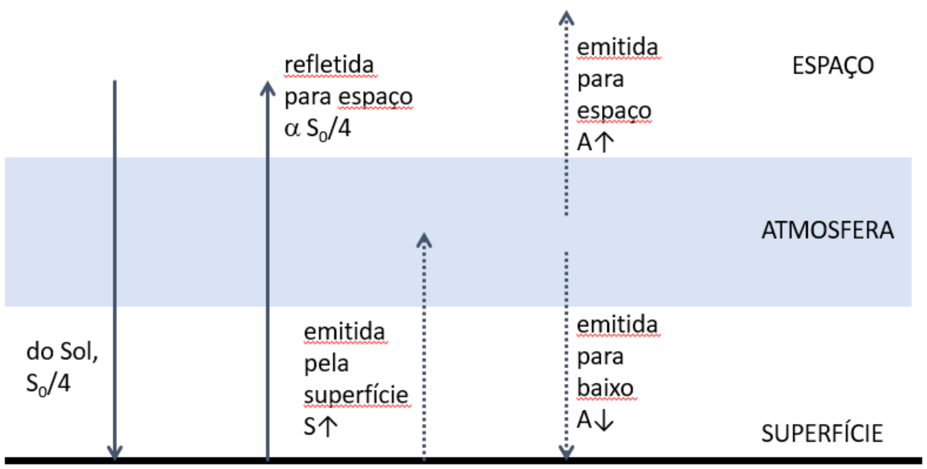
13. Sem a cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica, o albedo terrestre seria de 27%. Determine o efeito que isso teria na temperatura da superfície terrestre, mantendo o equilíbrio radiativo da atmosfera.

No planeta Terra, ao contrário da Lua, temos uma atmosfera que altera o equilíbrio radiativo através do efeito de estufa. Uma aproximação simplista (e que sabemos sobrestimar a temperatura da superfície da Terra) é considerar que

a) a atmosfera é transparente à radiação solar, mas

b) a atmosfera é opaca à radiação térmica emitida pelo planeta.

Neste caso temos de resolver simultaneamente o equilíbrio radiativo da superfície e da atmosfera. Para o efeito podemos considerar a seguinte nomenclatura. Na figura setas com linhas sólidas refere-se à radiação com o espectro solar e as setas a tracejado a radiação emitida pela superfície ou atmosfera.



Temos então

$$\text{Superfície: } (1-\alpha)S_0 + A\downarrow = S\uparrow$$

$$\text{Atmosfera: } S\uparrow = A\downarrow + A\uparrow$$

em que

$$S\uparrow = \sigma {T_s}^4 \text{ e}$$

$$A\uparrow = A\downarrow = \sigma {T_a}^4$$

sendo T_s a temperatura da superfície e T_a a temperatura da atmosfera.

Substituindo temos

$$\text{Superfície: } (1-\alpha)S_0 + \sigma {T_a}^4 = \sigma {T_s}^4$$

$$\text{Atmosfera: } \sigma {T_s}^4 = 2\,\sigma {T_a}^4$$

De onde resulta:

$$\sigma {T_a}^4 = \frac{1}{2}\sigma {T_s}^4$$

$$(1-\alpha)S_0 + \frac{1}{2}\sigma {T_s}^4 = \sigma {T_s}^4$$

$$(1-\alpha)S_0 = \frac{1}{2}\sigma {T_s}^4$$

$${T_s}^4 = 2\,\frac{(1-\alpha)S_0}{\sigma}$$

$$T_s = \sqrt[4]{2\,\frac{(1-\alpha)S_0}{\sigma}} = \sqrt[4]{2\,\frac{(1-0.3)\,340}{5.6\times 10^{-8}}} = \sqrt[4]{2}\times 255 = 303\,K$$

Com estas aproximações, para um albedo de 0.30 a temperatura da superfície da Terra é 303 K (ou 30 °C, demasiado elevado). Se o albedo fosse um pouco menor devido ao desaparecimento da cobertura de neve e gelo da Gronelândia e Antártica do gelo o efeito seria

$$T_s = \sqrt[4]{2\,\frac{(1-0.27)\,340}{5.6\times 10^{-8}}} = 306\,K$$

Ou seja, **o efeito da alteração do albedo é um aumento de temperatura média de +3°C.** Comparando com o aumento de temperatura média da Terra associada às emissões antropogénicas de gases de efeito de estufa (+1.5 a 2.0 °C, se tudo correr pelo melhor) podemos observar que o efeito da alteração do albedo poderia ser devastador.

Nota: A amplitude do efeito da variação do albedo na temperatura da superfície é o mesmo se considerarmos um modelo para o equilíbrio radiativo mais sofisticado.

14. O efeito da erupção do vulcão Pinatubo em 1992 na temperatura média do planeta foi estimado num arrefecimento de 0.5 °C durante os 2 anos seguintes à erupção. Determine a variação do albedo médio do planeta devido à erupção.

A abordagem pode ser igual à da pergunta anterior sendo agora a variável desconhecida o albedo e a diferença de temperatura dada. Nesta equação $\alpha_1 = 0.30$ é o albedo "normal" da Terra e α_2 o albedo temporário que resultou do Pinatubo.

$$\sqrt[4]{2\ \frac{(1-\alpha_1)\ 340}{5.6\ \times 10^{-8}}} - \sqrt[4]{2\ \frac{(1-\alpha_2)\ 340}{5.6\ \times 10^{-8}}} = \ -0.5$$

$$\sqrt[4]{2\ \frac{(1-\alpha_2)\ 340}{5.6\ \times 10^{-8}}} = \ \sqrt[4]{2\ \frac{(1-0.30)\ 340}{5.6\ \times 10^{-8}}} + 0.5 = 303.5 + 0.5 = 304$$

$$2\ \frac{(1-\alpha_2)\ 340}{5.6\ \times 10^{-8}} = 304^4$$

$$1-\alpha_2 = \frac{304^4 \times 5.6\ \times 10^{-8}}{2 \times 340}$$

$$\boldsymbol{\alpha_2 = 0.295}$$

Ou seja, o efeito das poeiras e gases do vulcão Pinatubo correspondeu a uma redução do albedo de 0.30 para 0.295 (cerca de 1.5% em termos relativos).

[Este resultado tão relevante de uma pequena alteração do albedo é uma boa motivação para explorar soluções de *geoengineering*… apesar de todos os riscos que poderia envolver!]

FORMULÁRIO UTILIZADO NESTA SÉRIE DE PROBLEMAS

$$\cos\psi = \frac{\sin\alpha\sin\phi - \sin\delta}{\cos\alpha\cos\phi}$$

$$\sin\psi = \frac{\cos\delta\sin\omega}{\cos\alpha}$$

$$\delta = 23.45\sin\left(\frac{360}{365}(d+284)\right)$$

$$E_0 = 1 + 0.033\cos\left(\frac{2\pi\, d}{365}\right)$$

$$\omega_s = \arccos(-\tan\phi\tan\delta)$$

$$\omega = 15\,(12-h)$$

$$Hora\ local = Hora\ solar - EOT + \frac{LSM - LONG}{15}$$

$$EOT(mins) = -7.655\sin\left(\frac{360}{365}d\right) + 9.873\sin\left(2\frac{360}{365}d + 205.7\right)$$

$$GI(\beta) = DNI\cos\theta + \rho\,GHI\;\frac{1-\cos\beta}{2} + DHI\;\frac{1+\cos\beta}{2}$$

$$H_0 = \frac{24}{\pi}I_{sc}E_0\left(\frac{\pi}{180}\omega'_s\sin\delta\sin(\phi-\beta) + \cos\delta\cos(\phi-\beta)\sin\omega'_s\right)$$

$$\sin\alpha = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos\omega$$

$$\cos\theta = \sin\delta\sin(\phi-\beta) + \cos\delta\cos(\phi-\beta)\cos\omega$$

$$\omega'_s = \min\{\arccos(-\tan\phi\tan\delta)\,,\arccos(-\tan(\phi-\beta)\tan\delta)\}$$

$$I_0\big|_{t_1}^{t_2} = I_{sc}E_0\left((t_2-t_1)\sin\delta\sin\phi + \frac{12}{\pi}(\sin(15\,t_1) - \sin(15\,t_2))\cos\delta\cos\phi\right)$$

$$k_d \equiv \frac{I_d}{I} = \begin{cases} 1.012 - 0.248\,k_t \Leftarrow\ k_t \le 0.3 \\ 1.45 - 1.67\ k_t \Leftarrow\ 0.3 < k_t \le 0.78 \\ 0.147 \Leftarrow\ k_t > 0.78 \end{cases}$$

$$r_t(\omega) \equiv \frac{\overline{I_t}}{\overline{H_t}} \approx \frac{\overline{I_t}}{H_t} = \frac{\pi}{24}(a + b\cos\omega)\;\frac{\cos\omega - \cos\omega_s}{\sin\omega_s - \left(\frac{\pi}{180}\omega_s\cos\omega_s\right)}$$

$$a = 0.409 + 0.5016\sin(\omega_s - 60°)$$

$$b = 0.6609 - 0.4676\sin(\omega_s - 60°)$$